EJERCICIOS PROPUESTOS

CURSO DE ANÁLISIS COMPLEJO

4-Octubre-2007 (VARIABLE COMPLEJA/EjAMII/EjerPrII2.tex)

Capítulo 2.

Teoría de Cauchy elemental.

pp. 75 - 110

2.4.3. Ejercicios Propuestos (pp. 86-87)

Ejerc. 79 - 88

Ejercicio Propuesto 81.
Calcula

$$\int_\gamma z^2\,dz$$

siendo $\gamma = [i, 1+i, 3+3i]$.

Solución.
Escribamos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, donde $\gamma_1 = [i, 1+i]$ y $\gamma_2 = [1+i, 3+3i]$. Por tanto

$$I = \int_\gamma z^2\,dz = \int_{\gamma_1} z^2\,dz + \int_{\gamma_2} z^2\,dz.$$

Parametrizando en la manera usual para segmentos, tenemos que
$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ está dada por

$$\gamma_1(t) = (1-t)i + t(1+i) = t + i,$$

y por tanto

$$\int_{\gamma_1} z^2\,dz = \int_0^1 (t+i)^2\,dt = \frac{1}{3}(t+i)^3\Big]_0^1 =$$
$$\frac{1}{3}\left[(1+i)^3 - i^3\right] = \frac{1}{3}\left[(1+i)^3 + i\right].$$

Análogamente
$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ está dada por

$$\gamma_2(t) = (1-t)(1+i) + t(3+3i) = (1+i)(1+2t),$$

y por tanto

$$\int_{\gamma_2} z^2\,dz = \int_0^1 [(1+i)(1+2t)]^2 2(1+i)\,dt =$$

$$(1+i)^3 \int_0^1 2(1+2t)^2\,dt = \frac{1}{3}(1+i)^3(1+2t)^3\Big]_0^1 =$$
$$\frac{1}{3}(1+i)^3\left[3^3 - 1\right] = \frac{26}{3}(1+i)^3.$$

En conclusión

$$I = \frac{1}{3}\left[(1+i)^3 + i\right] + \frac{26}{3}(1+i)^3 = 9(1+i)^3 + \frac{1}{3}i =$$

$$9(1+3i-3-i)+\frac{1}{3}i=-18+\frac{55}{3}i.$$

■

Ejercicio Propuesto 82.
Calcula

$$\int_\gamma |\, z \,|\, \overline{z}\, dz$$

siendo γ *el camino formado por la mitad superior de la circunferencia unidad y el segmento* $[-1,1]$.

Solución.
Escribamos $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, donde $\gamma_1=[-1,1]$ y γ_2 es la mitad superior de la circunferencia unidad. Por tanto

$$I=\int_\gamma |\, z \,|\, \overline{z}\, dz=\int_{\gamma_1} |\, z \,|\, \overline{z}\, dz+\int_{\gamma_2} |\, z \,|\, \overline{z}\, dz.$$

La parametrización más fácil que se puede dar de γ_1 es la siguiente

$\gamma_1:[-1,1]\to\mathbb{C}$ dada por

$$\gamma_1(t)=t,$$

y por tanto

$$\int_{\gamma_1} |\, z \,|\, \overline{z}\, dz=\int_{-1}^{1} |\, t \,|\, t\, dt=-\int_{-1}^{0} t^2\, dt+\int_0^1 t^2\, dt=0.$$

La parametrización usual para la circunferencia nos lleva a considerar

$\gamma_2:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ dada por

$$\gamma_2(t)=e^{it}$$

y por tanto

$$\int_{\gamma_2} |\, z \,|\, \overline{z}\, dz=\int_0^\pi |\, e^{it} \,|\, e^{-it} i e^{it}\, dt=$$

$$\int_0^\pi i\, dt=\left. it\right]_0^\pi=i\pi.$$

En conclusión

$$I=0+i\pi=i\pi.$$

■

Ejercicio Propuesto 84.
Sean γ un camino cerrado en $\mathbb{C}$ y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función de clase C^1. Prueba que

$$\int_\gamma f(z)\overline{f'(z)\,dz}$$

es un imaginario puro.

Solución.
Supongamos que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y consideremos la función $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ dada por $g = f \circ \gamma$. Por la regla de la cadena, g es derivable a trozos en $[a,b]$ y se tiene que $g' = (f' \circ \gamma).\gamma'$.

Notemos que

$$I = \int_\gamma f(z)\overline{f'(z)\,dz} = \int_a^b f(\gamma(t))\overline{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt} =$$

$$\int_a^b g(t)\overline{g'(t)}\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left(g(t)\overline{g'(t)}\right)\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\left(g(t)\overline{g'(t)}\right)\,dt.$$

Escribamos $g = u + iv$ y notemos que $g' = u' + iv'$, por lo que

$$\mathrm{Re}\left(g(t)\overline{g'(t)}\right) = u(t)u'(t) + v(t)v'(t).$$

En consecuencia,

$$\int_a^b \mathrm{Re}\left(g(t)\overline{g'(t)}\right)\,dt = \int_a^b u(t)u'(t)\,dt + \int_a^b v(t)v'(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\,u(t)^2\Big]_a^b + \frac{1}{2}\,v(t)^2\Big]_a^b = \frac{1}{2}\left[u(b)^2 - u(a)^2\right] + \frac{1}{2}\left[v(b)^2 - v(a)^2\right].$$

Puesto que

$$u(a) + iv(a) = g(a) = f(\gamma(a)) = f(\gamma(b)) = g(b) = u(b) + iv(b),$$

se sigue que

$$u(a) = u(b) \quad \text{y} \quad v(a) = v(b).$$

Por tanto

$$\int_a^b \mathrm{Re}\left(g(t)\overline{g'(t)}\right)\,dt = 0,$$

y en consecuencia I es imaginario puro.

$\blacksquare$

Ejercicio Propuesto 85.
Prueba que para $0 < r < 1$*, se tiene que*

$$\int_{C(0,r)} \frac{log(1+z)}{z}\, dz = 0.$$

Deduce que

$$\int_0^{2\pi} log(1 + r^2 + 2r\, cos\,\theta)\, d\theta = 0.$$

.

Solución.
Como

$$log\, z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, (z-1)^n, \quad \forall z \in D(1,1),$$

se sigue que

$$log\,(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, z^n = z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, z^n, \quad \forall z \in D(0,1),$$

y por tanto

$$\frac{log\,(1+z)}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, z^n, \quad \forall z \in D(0,1).$$

Por consiguiente, la función $\frac{log\,(1+z)}{z}$ tiene primitiva en el disco $D(0,1)$. A saber, la función F dada por

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\, z^n, \quad \forall z \in D(0,1).$$

Por el Teorema de caracterización de existencia de primitivas, para cada $0 < r < 1$, se tiene que

$$\int_{C(0,r)} \frac{log(1+z)}{z}\, dz = 0.$$

DE OTRA MANERA: Cuando veamos la fórmula de Cauchy para el disco, podremos afirmar que, para cada $0 < r < 1$, se tiene que

$$\int_{C(0,r)} \frac{log(1+z)}{z}\, dz = log(1+0) = log(1) = 0.$$

Finalmente, acogiéndonos a la definición de integral a lo largo de un camino, notemos que

$$0 = \int_{C(0,r)} \frac{log(1+z)}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{log(1+re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} i\, log(1+re^{it})\, dt = \int_0^{2\pi} (-arg(1+re^{it}) + i\, log \mid 1+re^{it} \mid)\, dt =$$

$$-\int_0^{2\pi} arg(1+re^{it})\, dt + i \int_0^{2\pi} log\, \sqrt{(1+r\, cos\, t)^2 + r^2\, sen^2 t}\, dt.$$

Luego

$$0 = \int_0^{2\pi} log\, \sqrt{(1+r\, cos\, t)^2 + r^2\, sen^2 t}\, dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} log\, (1 + r^2\, cos^2\, t + 2r\, cos\, t + r^2\, sen^2 t)\, dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} log\, (1 + r^2 + 2r\, cos\, t)\, dt.$$

■

2.4.8. Ejercicios Propuestos (pp. 99-101)

Ejerc. 89 - 102

Ejercicio Propuesto 93.
Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -i$, definamos

$$f(z) = \log(i + z).$$

a) Justifica que f es discontinua en los puntos de la forma $\rho - i$, con $\rho < 0$, y holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{\rho - i \,:\, \rho \leq 0\}$.

b) Halla la serie de Taylor de f centrada en $z_0 = -1 + i$. Sea φ la función suma de dicha serie definida, naturalmente, en su disco de convergencia. Indica para qué valores de $z \in \Omega$ se verifica que $f(z) = \varphi(z)$.

Solución.
a) El resultado se sigue de los siguientes dos hechos:
- La función $\log : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ y discontinua en $\mathbb{R}^-$.
- La traslación $z \mapsto i + z$ es una biyección biholomorfa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que aplica $\{\rho - i \,:\, \rho \leq 0\}$ sobre $\mathbb{R}_0^-$, y $\{\rho - i \,:\, \rho < 0\}$ sobre $\mathbb{R}^-$.

b) Por el Teorema de Taylor sabemos que, en el más grande disco centrado en z_0 y contenido en Ω, la función f coincide con la función suma de la serie de Taylor de f centrada en z_0. Nótese que el tal disco es $D(z_0, 2)$. Para calcular la serie de Taylor de f centrada en $z_0 \in \Omega$ vamos a desarrollar f' en serie de potencias centrada en z_0. Por las reglas de derivación, para todo $z \in \Omega$ se verifica que

$$f'(z) = \frac{1}{i+z} = \frac{1}{-1+2i+(z-(-1+i))} = \frac{1}{-1+2i}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-2i}}.$$

Teniendo en cuenta el estudio de la serie geométrica, sabemos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Además nótese que

$$\left|\frac{z-z_0}{1-2i}\right| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z-z_0| < |1-2i| = \sqrt{5}.$$

Por tanto

$$f'(z) = \frac{1}{-1+2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-2i}\right)^n =$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}\,(z-z_0)^n, \qquad \forall z \in D(z_0,\sqrt{5}).$$

Por el Teorema de derivación de la función suma de una serie de potencias podemos afirmar que

$$f(z) = K - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(1-2i)^{n+1}}\,(z-z_0)^{n+1} =$$

$$K - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1-2i)^n}\,(z-z_0)^n, \qquad \forall z \in D(z_0,2)$$

para conveniente constante K. Nótese que

$$K = f(z_0) = \log(i+z_0) = \log(-1+2i) = \log|-1+2i| + i\arg(-1+2i) =$$

$$\log\sqrt{5} + i\arg(-1+2i) = \frac{1}{2}\log 5 + i\,(\arctan(-2)+\pi).$$

Vamos a calcular el radio de convergencia R de la serie de Taylor de f en z_0. Como quiera que

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{n\,5^{n/2}}{(n+1)\,5^{(n+1)/2}} = \frac{n}{(n+1)\,5^{1/2}} \longrightarrow= \frac{1}{5^{1/2}}$$

se sigue que $R=\sqrt{5}$. Por consiguiente, la función φ suma de la serie de Taylor de f en z_0 está definida en el disco $D(z_0,\sqrt{5})$. Puesto que f es discontinua en la semirecta $S=\{\rho - i\,:\,\rho<0\}$ las funciones f y φ no pueden coincidir en $D(z_0,\sqrt{5})$. Lo que ciertamente ocurrirá (Principio de Identidad) es que coinciden en

$$D(z_0,\sqrt{5})\bigcap\{z\in\mathbb{C}\,:\,\operatorname{Im} z \geq -1\}.$$

■

Ejercicio Propuesto 95.
Sea $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Justifica que hay una única función f holomorfa en $D(0,1)$ tal que

$$zf'(z) + \alpha f(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad (z \in D(0,1)).$$

Solución.
Unicidad (supuesta la existencia)
Supongamos que existe una función f holomorfa en $D(0,1)$ verificando que

$$zf'(z) + \alpha f(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad \forall z \in D(0,1). \tag{1}$$

Por el Teorema de Taylor, f es la función suma de su serie de Taylor centrada en 0, luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n, \qquad \forall z \in D(0,1),$$

y por el Teorema de derivación de la función suma de una serie de potencias

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, c_n\, z^{n-1}, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

En consecuencia,

$$zf'(z) + \alpha f(z) = \alpha c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+\alpha)\, c_n\, z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Como quiera que

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, z^n, \qquad \forall z \in D(0,1),$$

se sigue de (1) que

$$(n+\alpha)c_n = (-1)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

o lo que es lo mismo

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n+\alpha}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y por tanto f es única.

¡DE OTRA MANERA!

Supongamos que existe una función f holomorfa en $D(0,1)$ verificando que

$$zf'(z) + \alpha f(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad \forall z \in D(0,1). \tag{2}$$

Demostremos que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que

$$zf^{n+1)}(z) + (n+\alpha)f^{n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}}, \qquad \forall z \in D(0,1). \tag{3}$$

Por inducción. La expresión (3) para $n = 0$ no es otra cosa que la condición inicial (2). Supongamos que la expresión (3) es válida para un $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y vamos a demostrarla para $n+1$. Derivando en (3) obtenemos que para todo $z \in D(0,1)$ se verifica que

$$f^{n+1)}(z) + zf^{n+2)}(z) + (n+\alpha)f^{n+1)}(z) = \frac{-(-1)^n n!\,(n+1)(1+z)^n}{(1+z)^{2(n+1)}},$$

y por tanto

$$zf^{n+2)}(z) + (n+1+\alpha)f^{n+1)}(z) = \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!}{(1+z)^{n+2}}, \qquad \forall z \in D(0,1),$$

demostrando la validez de (3) para $n+1$.

Evaluando la expresión (3) en 0 obtenemos que

$$(n+\alpha)f^{n)}(0) = (-1)^n n! \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

o lo que es lo mismo

$$f^{n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{n+\alpha}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por el Teorema de Taylor, f es la función suma de su serie de Taylor centrada en 0, luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}\, z^n, \qquad \forall z \in D(0,1),$$

y por tanto f es única.

Existencia
Atendiendo al resultado obtenido en el apartado anterior, consideraremos la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} z^n.$$

Puesto que

$$\frac{|\ c_{n+1}\ |}{|\ c_n\ |} = \frac{n+\alpha}{n+1+\alpha} \longrightarrow 1$$

se sigue que el radio de convergencia de dicha serie es $R = 1$. Por el Teorema de derivación sabemos que la función suma de dicha serie, llámese f, es holomorfa en $D(0,1)$ y que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+\alpha} z^{n-1}.$$

En consecuencia, para cada $z \in D(0,1)$, tenemos que

$$zf'(z) + \alpha f(z) = z\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+\alpha} z^{n-1} + \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} z^n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \frac{(-1)^n n}{n+\alpha} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n n}{n+\alpha} + \alpha \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \right] z^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}.$$

Luego f verifica la condición (2).

■

Ejercicio Propuesto 97.
Prueba que los coeficientes c_n de la serie de Taylor de

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

centrada en $z = 0$ satisfacen las igualdades:

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \quad \textit{para todo} \quad n \geq 0.$$

Calcula dichos coeficientes de forma explícita descomponiendo la fracción dada en fracciones simples. Calcula el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$. La sucesión $\{c_n\}$ se llama sucesión de Fibonacci.

Solución.
Los ceros de $z^2 + z - 1$ son

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Luego f es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$ y, por el Teorema de Taylor, f admite un desarrollo en serie de potencias en el disco

$$D(0, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}).$$

Si tal un desarrollo viene dado por

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

entonces

$$1 = (1 - z - z^2)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{n+2} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} z^n = c_0 + (c_1 - c_0)z + \sum_{n=2}^{+\infty} (c_n - c_{n-1} - c_{n-2}) z^n,$$

y por tanto

$$c_0 = 1, \quad c_1 - c_0 = 0, \quad \text{y} \quad c_n - c_{n-1} - c_{n-2} = 0 \quad \text{para todo} \quad n \geq 2,$$

o lo que es lo mismo

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \ \text{ para todo } \ n \geq 0.$$

Descomponiendo en fracciones simples

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{-1}{(z+\frac{1+\sqrt{5}}{2})(z+\frac{1-\sqrt{5}}{2})} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{1+\sqrt{5}}\,\frac{1}{\frac{2}{1+\sqrt{5}}\,z+1} - \frac{2}{1-\sqrt{5}}\,\frac{1}{\frac{2}{1-\sqrt{5}}\,z+1}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{1+\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\,z\right)^n - \frac{2}{1-\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\,z\right)^n\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n+1} z^n\right].$$

Puesto que

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1,$$

se sigue que

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,(-1)^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n - \right.$$

$$\left.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,(-1)^{n+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] z^n.$$

Luego

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente calculemos el radio de convergencia de la serie obtenida

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} =$$

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}.$$

Puesto que $\mid \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \mid < 1$, y por tanto

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \longrightarrow 0,$$

se sigue que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Luego

$$R = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

■

Ejercicio Propuesto 99.
Considera las funciones complejas dadas para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i,i\}$ *por*

$$f(z) = \log\frac{z-i}{z+i} \quad y \quad g(z) = \log(z-i) - \log(z+i).$$

a) Estudia dónde son holomorfas las funciones f *y* g*.*

b) ¿Donde coinciden de f *y* g*?*

c) Calcula el desarrollo en serie de Taylor de g *centrado en* $z = 1$*.*

d) Justificar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n2^n}$$

converge (absolutamente) y calcula su suma.

Solución.

a). La función φ dada por

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

es una biyección biholomorfa de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ en $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ cuya inversa viene dada por

$$\varphi^{-1}(z) = -i\,\frac{z+1}{z-1}.$$

Puesto que $\log : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ y $f = \log\circ\varphi$, por la regla de la cadena se sigue que f es derivable en el conjunto

$$\Omega_f = \left\{z \in \mathbb{C}\backslash\{-i,i\} \,:\, \varphi(z) \notin \mathbb{R}_0^-\right\}.$$

Notemos que para $z \neq -i$ se verifica que

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(\overline{z}-i)}{\mid z+i\mid^2} = \frac{\mid z\mid^2 - 1 - i(z+\overline{z})}{\mid z+i\mid^2},$$

y por tanto

$$\varphi(z) \in \mathbb{R}_0^- \quad\Leftrightarrow\quad \mid z\mid^2 - 1 - 2iRe(z) \in \mathbb{R}_0^- \quad\Leftrightarrow\quad Re(z) = 0 \ \text{ y } \ \mid z\mid \leq 1.$$

En consecuencia,
$$\Omega_f = \mathbb{C}\backslash[-i, i].$$

Notemos que las aplicaciones traslación φ_1, φ_2 dadas por

$$\varphi_1(z) = z - i \ \text{ y } \ \varphi_2(z) = z + i$$

son biyecciones biholomorfas de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$ y además son inversas. Por tanto la aplicación $g_1 : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ dada por $g_1(z) = \log(z - i)$ es holomorfa en

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \,:\, \varphi_1(z) \in \mathbb{R}_0^-\} = \mathbb{C}\backslash\left(\mathbb{R}_0^- + i\right),$$

mientras que la aplicación $g_2 : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}$ dada por $g_2(z) = \log(z + i)$ es holomorfa en

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \,:\, \varphi_2(z) \in \mathbb{R}_0^-\} = \mathbb{C}\backslash\left(\mathbb{R}_0^- - i\right).$$

En consecuencia, g es holomorfa en

$$\Omega_g = \mathbb{C}\backslash\left[\left(\mathbb{R}_0^- + i\right) \cup \left(\mathbb{R}_0^- - i\right)\right].$$

b). Es claro que las componentes conexas de $\Omega := \Omega_f \cap \Omega_g$ son Ω_1 y Ω_2, donde
$$\Omega_1 = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \,:\, Re(z) < 0 \text{ y } \mid Im(z) \mid < 1\},$$
y
$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, Re(z) > 0 \text{ o } \mid Im(z) \mid > 1\}.$$
Puesto que para todo $z \in \Omega$ se tiene que

$$f'(z) = \frac{z+i}{z-i}\,\frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} = g'(z)$$

se sigue que f y g se diferencian en una constante en Ω_1 y en Ω_2. Dado que

$$f(1) = \log\frac{1-i}{1+i} = \log(-i) = -\frac{\pi}{2}\,i,$$

$$f(-1) = \log\frac{-1-i}{-1+i} = \log i = \frac{\pi}{2}\,i$$

y

$$g(1) = \log(1-i) - \log(1+i) = \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\,i - (\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\,i) = -\frac{\pi}{2}\,i,$$

$$g(-1) = \log(-1-i) - \log(-1+i) = \log\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}\,i - (\log\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}\,i) = -\frac{3\pi}{2}\,i,$$

se sigue que

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \Omega_1$$

y

$$f(z) = g(z) - 2\pi\, i, \quad \forall z \in \Omega_2.$$

c). Por el Teorema de Taylor, g admite un desarrollo en serie centrado en 1 válido en $D(1, \sqrt{2})$ (que es el más grande disco centrado en 1 y contenido en Ω_g). Para calcular tal desarrollo vamos a estudiar en primer lugar el de la derivada de g.

$$g'(z) = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-1+1-i} - \frac{1}{z-1+1+i} =$$

$$\frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}} - \frac{1}{1+i}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+i}}.$$

Teniendo en cuenta el estudio de la serie geométrica, sabemos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1),$$

y por tanto, cuando $\mid -\frac{z-1}{1-i} \mid < 1$, o lo que es lo mismo cuando $\mid z-1 \mid < \sqrt{2}$ tenemos que

$$g'(z) = \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-1}{1-i}\right)^n - \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-1}{1+i}\right)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}\,(z-1)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\,(z-1)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(1+i)^{n+1}-(1-i)^{n+1}}{((1-i)(1+i))^{n+1}}\,(z-1)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(1+i)^{n+1}-(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}\,(z-1)^n.$$

Puesto que $g(1) = -\frac{\pi}{2}\, i$ por el Teorema de derivación de las series de potencias podemos afirmar que

$$g(z) = -\frac{\pi}{2}\, i + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{(1+i)^{n+1} - (1-i)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \, (z-1)^{n+1} =$$

$$-\frac{\pi}{2}\, i + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \, \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n 2^n} \, (z-1)^n$$

y este es el desarrollo de Taylor de g centrado en 1.

Vamos a calcular el radio de convergencia de dicha serie a través de la fórmula de Cauchy-Hadamard. Nótese que $(1-i)i = 1+i$ y por tanto

$$\mid (1+i)^n - (1-i)^n \mid = \mid (1-i)^n (i^n - 1) \mid = \mid 1 - i \mid^n \mid i^n - 1 \mid = 2^{\frac{n}{2}} \mid i^n - 1 \mid,$$

luego

$$\sqrt[n]{\mid c_n \mid} = \sqrt[n]{\frac{\mid (1+i)^n - (1-i)^n \mid}{n 2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \, \sqrt[n]{\mid i^n - 1 \mid}.$$

Como quiera que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq 1 \;\; \text{y} \;\; \sqrt[n]{\mid i^n - 1 \mid} \leq \sqrt[n]{2} \to 1,$$

se sigue que

$$\limsup \sqrt[n]{\mid c_n \mid} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora bien,

$$\sqrt[4k+2]{\mid c_{4k+2} \mid} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, \frac{1}{\sqrt[4k+2]{4k+2}} \, \sqrt[4k+2]{\mid i^{4k+2} - 1 \mid} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \, \frac{1}{\sqrt[4k+2]{4k+2}} \, \sqrt[4k+2]{2} \quad \to \quad \frac{\sqrt{2}}{2},$$

donde se ha tenido en cuenta que $\sqrt[n]{n} \to 1$ y que $\sqrt[n]{2} \to 1$ (ambas como consecuencia del Criterio de la Raíz). En consecuencia, $R = \sqrt{2}$, y por tanto la serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto contenido en $D(1, \sqrt{2})$.

d). Puesto que $2 \in D(1, \sqrt{2})$, se tiene que la serie converge (absolutamente) en 2, y además

$$g(2) = -\frac{\pi}{2}\, i + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n 2^n}.$$

Como quiera que

$$g(2) = \log(2-i) - \log(2+i) =$$

$$\log\sqrt{5} + i \operatorname{arc\,tg}\,(-\frac{1}{2}) - \left(\log\sqrt{5} + i \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right) = -2i \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2},$$

se sigue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n 2^n} = i\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right).$$

■

Ejercicio Propuesto 101.
Para $z \neq 1$ *sea* $f(z) = \frac{1}{z}\left(e^{-z} - \frac{1}{1+z}\right)$ *y* $f(0) = 0$.

a) Justifica que f *es holomorfa en el abierto* $C\backslash\{-1\}$.

b) Integra dicha función a lo largo de la frontera del disco $D(0,R)$ *que queda en el primer cuadrante para calcular el valor de la integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{sen\, x}{x}\, dx.$$

Solución.
a) Claramente f es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1,0\}$. Notemos que f es continua en 0.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{-z} - \frac{1}{1+z}}{z} = \frac{d}{dz}\left(e^{-z} - \frac{1}{1+z}\right)_{z=0} =$$

$$\left(-e^{-z} + \frac{1}{(1+z)^2}\right)_{z=0} = \frac{-1+1}{1} = 0.$$

Por el Teorema de Riemann, f es holomorfa en 0.

b) Fijado $R > 0$, llamemos γ_R al trozo de circunferencia de centro y radio R en el primer cuadrante. Por el Teorema de Cauchy para dominios estrellados tenemos que

$$\int_{[0,R]+\gamma_R+[iR,0]} f(z)\, dz = 0.$$

En consecuencia,

$$\int_{[0,iR]} f(z)\, dz = \int_{[0,R]} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz. \tag{4}$$

Empecemos analizando la integral de la izquierda

$$\int_{[0,iR]} f(z)\, dz = \int_0^R f(it)\, i\, dt = \int_0^R \frac{1}{it}\left(e^{-it} - \frac{1}{1+it}\right) i\, dt =$$

$$\int_0^R \frac{1}{t}\left(cos\, t - i\, sen\, t - \frac{1-it}{1+t^2}\right) dt =$$

$$\int_0^R \left(\frac{cos\, t}{t} - \frac{1}{t(1+t^2)}\right) dt - i \int_0^R \left(\frac{sen\, t}{t} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

Notemos que

$$\int_{[0,R]} f(z)\, dz = \int_0^R f(t)\, dt = \int_0^R \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \frac{1}{1+t}\right) dt \in \mathbb{R},$$

y que

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(Re^{it}) Rie^{it}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{Re^{it}}\left(e^{-Re^{it}} - \frac{1}{1+Re^{it}}\right) Rie^{it}\, dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-Rcos\, t - iRsen\, t} - \frac{1+Re^{-it}}{1+R^2+2Rcos\, t}\right) i\, dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-Rcos\, t}(cos\,(Rsen\, t) - isen\,(Rsen\, t)) - \frac{1+Rcos\, t - iRsen\, t}{1+R^2+2Rcos\, t}\right) i\, dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-Rcos\, t} sen\,(Rsen\, t) - \frac{Rsen\, t}{1+R^2+2Rcos\, t}\right) dt +$$

$$i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-Rcos\, t} cos\,(Rsen\, t) - \frac{1+Rcos\, t}{1+R^2+2Rcos\, t}\right) dt.$$

Considerando las partes imaginarias en la igualdad (4), de los cálculos que hemos hecho, se sigue que

$$\int_0^R \left(\frac{sen\, t}{t} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-Rcos\, t} cos\,(Rsen\, t) - \frac{1+Rcos\, t}{1+R^2+2Rcos\, t}\right) dt. \tag{5}$$

Ahora, estudiemos la integral de la derecha.

$$\mid \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rcos\, t} cos\,(Rsen\, t)\, dt \mid \leq$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mid e^{-Rcos\, t} cos\,(Rsen\, t) \mid\, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rcos\, t}\, dt.$$

Teniendo en cuenta que en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ la función coseno es concava, y por tanto

$$cos\, t \geq -\frac{2}{\pi} t + 1, \qquad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

se sigue que

$$-Rcos\,t \leq \frac{2R}{\pi}t - R, \qquad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

y por tanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rcos\,t}\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2R}{\pi}t-R}\,dt = \left[\frac{\pi}{2R}e^{\frac{2R}{\pi}t-R}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{\pi}{2R}(e^0 - e^{-R}) = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}).$$

Resumiendo,

$$\mid \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rcos\,t}cos\,(Rsen\,t)\,dt \mid \leq \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})$$

y por tanto dicha integral converge a 0 cuando $R \to +\infty$.

Por otra parte,

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + Rcos\,t}{1 + R^2 + 2Rcos\,t}\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+R}{1+R^2}\,dt \leq \frac{1+R}{1+R^2}\frac{\pi}{2},$$

y por tanto también dicha integral converge a 0 cuando $R \to +\infty$. Ahora, teniendo en cuenta la igualdad (5), podemos afirmar que

$$\int_0^R \left(\frac{sen\,t}{t} - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$

converge a 0 cuando $R \to +\infty$. Como quiera que

$$\int_0^R \frac{dt}{1+t^2} = [arctg\,t]_0^R = arctg\,R$$

converge a $\frac{\pi}{2}$ cuando $R \to +\infty$, se sigue que

$$\int_0^{+\infty} \frac{sen\,t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

■

Ejercicio Propuesto 102.
Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, y supongamos que $\overline{D}(a,R) \subseteq \Omega$. Prueba que

$$f(a) = \frac{1}{\pi R^2}\int\int_{D(a,R)} f(x,y)\,d(x,y).$$

Solución.
Consideremos la función $\phi : \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ que está determinada por el paso a coordenadas polares con centro en $a = x_0 + iy_0$, esto es

$$\phi(\rho, \theta) = (x_0 + \rho \, cos\, \theta, y_0 + \rho \, sen\, \theta) \equiv a + \rho e^{i\theta}.$$

Por el Teorema del cambio de variable obtenemos que

$$\int\int_{D(a,R)} f(x,y)\, d(x,y) = \int\int_{]0,R[\times]-\pi,\pi[} \rho f(a+\rho e^{i\theta})\, d(\rho,\theta) =$$

(por el Teorema de Fubini)

$$\int_0^R \left[\int_{-\pi}^{\pi} \rho f(a+\rho e^{i\theta})\, d\theta\right] d\rho = \int_0^R \frac{\rho}{i} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}}\, i\rho e^{i\theta} d\theta\right] d\rho =$$

$$\int_0^R \frac{\rho}{i} \left[\int_{C(a,\rho)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\right] d\rho = \int_0^R \frac{\rho}{i}\, 2\pi i f(a)\, d\rho =$$

(donde hemos hecho uso de la fórmula de Cauchy para la circunferencia)

$$\pi f(a) \int_0^R 2\rho\, d\rho = \pi f(a) \left[\rho^2\right]_0^R = \pi f(a) R^2 = \pi R^2 f(a).$$

$\blacksquare$

2.5.2. Ejercicios Propuestos (pp. 109-110)

Ejerc. 103 - 117

Ejercicio Propuesto 103.
Prueba que toda función entera que no tome valores reales es constante.

Solución.
Sea f una función entera que no toma valores reales. Como $\mathbb{C}$ es conexo y f es continua, se sigue que $f(\mathbb{C})$ es un conexo. Como

$$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : Im\, z < 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : Im\, z > 0\}$$

se sigue que

$$f(\mathbb{C}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : Im\, z < 0\} \text{ o } f(\mathbb{C}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : Im\, z > 0\}.$$

En cualquiera de los dos casos, $f(\mathbb{C})$ no puede ser denso en $\mathbb{C}$. Luego f es constante. ∎

Ejercicio Propuesto 104.
Sea f una función entera verificando

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Prueba que f es constante.

Solución.
La función f es biperiódica con periodos 1 e i. Luego si consideramos el cuadrado

$$C = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re\, z \leq 1,\ 0 \leq Im\, z \leq 1\},$$

se tiene que $f(\mathbb{C}) = f(C)$. Como quiera que C es compacto y f es continua, se tiene que $f(C)$ es un compacto de $\mathbb{C}$, esto es, $f(C)$ es cerrado y está acotado. Luego, $\overline{f(C)} = f(C) \neq \mathbb{C}$. En consecuencia, $\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$, y por tanto f es constante. ∎

Ejercicio Propuesto 105.
Sean f y g dos funciones enteras cuya composición es constante. ¿que se puede afirmar sobre f y g?.

Solución.
Sea $k \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(g(z)) = k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Si g no es constante, sabemos que $\overline{g(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. Como f es continua se tiene que

$$f(\mathbb{C}) = f(\overline{g(\mathbb{C})}) \subseteq \overline{f(g(\mathbb{C}))} = \overline{\{k\}} = \{k\}.$$

Luego f es constante. $\blacksquare$

Ejercicio Propuesto 106.
Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *tal que*

$$| f(z) | \leq \frac{1}{1- | z |} \qquad (| z |< 1).$$

Prueba que

$$| f^{n)}(0) | \leq e\,(n+1)! \ \ \textit{para todo} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Solución.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, por las desigualdades de Cauchy

$$| f^{n)}(0) | \leq \ n!\,\frac{M(r)}{r^n}, \quad \forall r \in]0,1[,$$

donde

$$M(r) = \max\{| f(z) | : \ z \in C(0,r)\}.$$

Como, por hipótesis, para $| z |= r$ se tiene que

$$| f(z) | \leq \frac{1}{1- | z |} = \frac{1}{1-r},$$

se sigue que $M(r) \leq \frac{1}{1-r}$, y por tanto

$$| f^{n)}(0) | \leq n!\,\frac{1}{r^n(1-r)}.$$

Consideremos la función $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^n(1-r)}$$

y veamos dónde alcanza su mínimo. Puesto que

$$\varphi'(r) = \frac{-nr^{n-1}(1-r) + r^n}{r^{2n}(1-r)^2} = \frac{r^{n-1}[-n + (n+1)r]}{r^{2n}(1-r)^2},$$

se sigue que

$$\varphi'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^{n-1}[-n + (n+1)r] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{n}{n+1}.$$

Además,

$$\varphi'(r) < 0 \ \text{ si } \ 0 < r < \frac{n}{n+1},$$

y

$$\varphi'(r) > 0 \ \text{ si } \ \frac{n}{n+1} < r < 1.$$

Luego φ alcanza su valor mínimo en $r = \frac{n}{n+1}$. Nótese que

$$\varphi(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^n(1 - \frac{n}{n+1})} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1).$$

Si se tiene en cuenta que la sucesión $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ crece a e, se sigue que

$$\varphi(\frac{n}{n+1}) \leq e(n+1),$$

y por tanto

$$\mid f^{n)}(0) \mid \leq e(n+1)!$$

■

Ejercicio Propuesto 107.
Sea f una función entera tal que $f(z) = f(f(z))$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Que puede afirmarse de f?.

Solución.
Supuesto f no constante, por el Teorema 2.23, para cada $z \in \mathbb{C}$, existe una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{C}$ tal que $\{f(z_n)\} \longrightarrow z$. De la continuidad de f, deducimos que $\{f(f(z_n))\} \longrightarrow f(z)$. Ahora bien, puesto que por hipótesis,

$$f(z_n) = f(f(z_n)), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

se sigue de la unicidad del límite que

$$z = f(z).$$

Por tanto la respuesta es: f es constante o $f = Id_{\mathbb{C}}$.

De otra manera:

Consideremos la función entera h dada por

$$h(z) = f(z) - z.$$

La condición $f(z) = f(f(z))$ para todo $z \in \mathbb{C}$ se relee $h \circ f = 0$. Por el ejercicio propuesto 105 sabemos que o bien f es constante o bien h es constante. Así, en el caso en que f no sea constante, ha de existir $k \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z + k, \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Ahora bien, puesto que $f(0) = f(f(0))$, se sigue que $k = 2k$, luego $k = 0$, y por tanto $f(z) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

En conclusión, o bien f es constante, o bien $f(z) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$. ■

Ejercicio Propuesto 108.
Calcula la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z \, dz}{z(1-z)^3}$$

para $\gamma = C(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\gamma = C(1, \frac{1}{2})$, $\gamma = C(2, 3)$.

Solución.

$\gamma = C(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

$$\int_{C(\frac{1}{4},\frac{1}{2})} \frac{e^z \, dz}{z(1-z)^3} = \int_{C(\frac{1}{4},\frac{1}{2})} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z} \, dz =$$

(como la función $\frac{e^z}{(1-z)^3}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, $\overline{D}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{1\}$, y $0 \in D(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia)

$$2\pi i \, \frac{e^0}{(1-0)^3} = 2\pi i.$$

\- - - - - - -

$\gamma = C(1, \frac{1}{2})$

$$\int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{e^z \, dz}{z(1-z)^3} = \int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{\frac{e^z}{z}}{(1-z)^3} = \int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{-\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3} =$$

(como la función $-\frac{e^z}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\overline{D}(1, \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$, y $1 \in D(1, \frac{1}{2})$, por la fórmula de Cauchy para las derivadas)

$$\frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(-\frac{e^z}{z} \right)_{z=1} = \pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z(1-z)}{z^2} \right)_{z=1} =$$

$$\pi i \left(\frac{[e^z(1-z) - e^z]z^2 - 2ze^z(1-z)}{z^4} \right)_{z=1} =$$

$$\pi i \left(\frac{-e^z(z^2-2z+2)}{z^3} \right)_{z=1} = -e\pi i.$$

\- - - - - - -

$\gamma = C(2,3)$

Descompongamos en fracciones simples la función racional del integrando

$$\frac{1}{z(1-z)^3} = \frac{-1}{z(z-1)^3} = \frac{A}{z} + \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \frac{B_3}{(z-1)^3}.$$

Luego

$$-1 = A(z-1)^3 + B_1 z(z-1)^2 + B_2 z(z-1) + B_3 z,$$

esto es

$$-1 = A(z^3 - 3z^2 + 3z - 1) + B_1(z^3 - 2z^2 + z) + B_2(z^2 - z) + B_3 z =$$

$$(A + B_1)z^3 + (-3A - 2B_1 + B_2)z^2 + (3A + B_1 - B_2 + B_3)z - A,$$

y por tanto

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} & A & + & B_1 & & & & & = 0 \\ - & 3A & - & 2B_1 & + & B_2 & & & = 0 \\ & 3A & + & B_1 & - & B_2 & + & B_3 & = 0 \\ - & A & & & & & & & = -1 \end{array}$$

de donde se sigue que

$$A = 1, \quad B_1 = -1, \quad B_2 = 1, \quad B_3 = -1.$$

Por tanto

$$\frac{1}{z(1-z)^3} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3},$$

y en consecuencia

$$\int_{C(2,3)} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3} = \int_{C(2,3)} \frac{e^z}{z}\,dz - \int_{C(2,3)} \frac{e^z}{z-1}\,dz +$$

$$\int_{C(2,3)} \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz - \int_{C(2,3)} \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz =$$

(por las fórmulas de Cauchy para las derivadas)

$$2\pi i e^0 - 2\pi i e^1 + \frac{2\pi i}{1!}\,e^1 - \frac{2\pi i}{2!}\,e^1 = 2\pi i(1-\frac{e}{2}) = \pi i(2-e).$$

■

Ejercicio Propuesto 109.
Calcula la integral

$$\int_\gamma \frac{cos\,z\,dz}{z^2(z-1)}$$

para $\gamma = C(0,\frac{1}{3})$, $\gamma = C(1,\frac{1}{3})$, $\gamma = C(0,2)$.

Solución.

$\gamma = C(0,\frac{1}{3})$

$$\int_{C(0,\frac{1}{3})} \frac{cos\,z\,dz}{z^2(z-1)} = \int_{C(0,\frac{1}{3})} \frac{\frac{cos\,z}{z-1}}{z^2}\,dz =$$

(como la función $\frac{cos\,z}{z-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, $\overline{D}(0,\frac{1}{3}) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{1\}$, y $0 \in D(0,\frac{1}{3})$, por la fórmula de Cauchy para la derivada primera)

$$\frac{2\pi i}{1!}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{cos\,z}{z-1}\right)_{z=0} = 2\pi i\left(\frac{-(z-1)sen\,z - cos\,z}{(z-1)^2}\right)_{z=0} = 2\pi i\,(-1) = -2\pi i.$$

\- - - - - - -

$\gamma = C(1,\frac{1}{3})$

$$\int_{C(1,\frac{1}{3})} \frac{cos\,z\,dz}{z^2(z-1)} = \int_{C(1,\frac{1}{3})} \frac{\frac{cos\,z}{z^2}}{z-1} =$$

(como la función $\frac{cos\, z}{(z^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\overline{D}(1, \frac{1}{3}) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$, y $1 \in D(1, \frac{1}{3})$, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia)

$$2\pi i \, \frac{cos\, 1}{1^2} = 2\pi i \, cos\, 1.$$

\- - - - - - -

$\gamma = C(0,2)$

Descompongamos en fracciones simples la función racional del integrando

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1}.$$

Luego

$$1 = Az(z-1) + B(z-1) + Cz^2$$

, esto es

$$1 = A(z^2-1) + B(z-1) + Cz^2 = (A+C)z^2 + (-A+B)z - B,$$

y por tanto

$$\begin{array}{rrrrrl} & A & & + & C & = 0 \\ - & A & + & B & & = 0 \\ & & - & B & & = 1 \end{array}$$

de donde se sigue que

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = 1.$$

Por tanto

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1},$$

y en consecuencia

$$\int_{C(0,2)} \frac{cos\, z\, dz}{z^2(z-1)} = -\int_{C(0,2)} \frac{cos\, z}{z}\, dz - \int_{C(0,2)} \frac{cos\, z}{z^2}\, dz + \int_{C(0,2)} \frac{cos\, z}{z-1}\, dz =$$

(por las fórmulas de Cauchy para las derivadas)

$$-2\pi i \, cos\, 0 - \frac{2\pi i}{1!}\,(-sen\, 0) + 2\pi i \, cos\, 1 = -2\pi i \,(1 - cos\, 1).$$

■

Ejercicio Propuesto 110.
Dado $n \in \mathbb{N}$, calcula las integrales

$$\int_{C(0,1)} \frac{sen\, z}{z^n}\, dz; \quad \int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz; \quad \int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{log\, z}{z^n}\, dz.$$

Solución.

Por la fórmula de Cauchy para las derivadas

$$\int_{C(0,1)} \frac{sen\, z}{z^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\, sen^{n-1)}\, 0 =$$

(teniendo en cuenta que $sen^{n)}\, z = sen\,(z + \frac{\pi}{2}\, n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

$$\frac{2\pi i}{(n-1)!}\, sen\,(\frac{\pi}{2}\,(n-1)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ (-1)^{k-1} \frac{2\pi i}{(n-1)!} & \text{si} \quad n = 2k \end{cases}$$

\- - - - - - -

Por la fórmula de Cauchy para las derivadas

$$\int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(e^z - e^{-z}\right)_{z=0} =$$

$$\frac{2\pi i}{(n-1)!} \left(e^0 - (-1)^{n-1} e^0\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ \frac{4\pi i}{(n-1)!} & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

Por el Teorema de Cauchy para dominios estrellados

$$\int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{log\, z}{z^n}\, dz = 0,$$

ya que $S := \{z \in \mathbb{C} \,:\, Re\, z > 0\}$ es un dominio estrellado, $\overline{D}(1, \frac{1}{2}) \subseteq S$, y la función $\frac{log\, z}{z^n}$ es holomorfa en S. ∎

Ejercicio Propuesto 111.
Se considera la sucesión de funciones dada por

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nz).$$

Justifica que $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $\mathbb{R}$ *pero no converge uniformemente en ningún subconjunto abierto de* C*.*

Solución.
Puesto que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ se verifica que } \ \mid f_n(x) \mid = \mid \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \mid \leq \frac{1}{n},$$

se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$.

Veamos que $\{f_n\}$ no converge puntualmente en ningún subconjunto abierto no vacío Ω de $\mathbb{C}$. En efecto, si Ω es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$, entonces es claro que Ω contiene algún z_0 no imaginario puro, esto es $\operatorname{Re}(iz_0) \neq 0$. Puesto que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nz_0)}{n}\right| = \frac{|e^{inz_0} - e^{-inz_0}|}{2n} \geq \frac{|e^{inz_0}| - |e^{-inz_0}|}{2n} = \frac{e^{n \operatorname{Re}(iz_0)} - e^{-n \operatorname{Re}(iz_0)}}{2n}$$

y (tanto en el caso $\operatorname{Re}(iz_0) < 0$, como en el caso $\operatorname{Re}(iz_0) > 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n \operatorname{Re}(iz_0)} - e^{-n \operatorname{Re}(iz_0)}}{2n} = +\infty,$$

se sigue que la sucesión $\left\{\frac{\operatorname{sen}(nz_0)}{n}\right\}$ no converge. ■

Ejercicio Propuesto 112.
Probar que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

converge en $D(0, 1)$ *y que su suma es una función holomorfa.*

Solución.
Veamos que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

converge uniformemente en todo compacto contenido en $D(0,1)$. Para ello, nos bastará probar que converge uniformemente en todo disco $\overline{D}(0,\rho)$ con $0<\rho<1$.

Fijado ρ con $0<\rho<1$, para todo $z\in\overline{D}(0,\rho)$ se verifica que

$$\mid z^n\mid\leq\rho^n \quad \text{y} \quad \mid 1-z^n\mid\geq 1-\mid z^n\mid\geq 1-\mid z\mid\geq 1-\rho.$$

Luego

$$\mid\frac{z^n}{1-z^n}\mid\leq\frac{\rho^n}{1-\rho}.$$

Puesto que la serie numérica

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\rho^n}{1-\rho}=\frac{1}{1-\rho}\sum_{n\geq 1}\rho^n$$

es una serie geométrica de razón $\rho<1$, y por tanto convergente, se sigue del criterio de la mayorante de Weierstrass que la serie de funciones

$$\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{1-z^n}$$

converge uniformemente en $\overline{D}(0,\rho)$.

Finalmente, por el Teorema de convergencia de Weierstrass, la serie

$$\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{1-z^n}$$

converge en $D(0,1)$ y su suma es una función holomorfa. ■

Ejercicio Propuesto 113.
Sea $\sum_{n\geq 1}f_n$ una serie de funciones holomorfas en $D(0,1)$ que converge uniformemente en conjuntos compactos. Sea

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{n,k}\,z^k \qquad (\mid z\mid<1).$$

Justifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_{n,k}\,z^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_{n,k}\right)z^k \qquad (\mid z\mid<1).$$

Solución.
Consideremos la función suma $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Se tiene entonces que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k}\, z^k \right) \qquad (|\, z \,|< 1). \tag{6}$$

Por otra parte, por el Teorema de convergencia de Weierstrass, f es holomorfa en $D(0,1)$, y además, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica que

$$f^{k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{k)}(z) \qquad (|\, z \,|< 1).$$

En particular, para $z = 0$ tenemos que

$$f^{k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{k)}(0),$$

y por tanto, teniendo en cuenta el Teorema de Taylor,

$$\frac{f^{k)}(0)}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^{k)}(0)}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,k}.$$

Luego

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(0)}{k!}\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,k} \right) z^k \qquad (|\, z \,|< 1). \tag{7}$$

De (6) y (7) se sigue la igualdad del enunciado. ■

Ejercicio Propuesto 114.
Prueba que para cada natural k la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 0} \frac{k}{kn(n+1)+1}\, z^n$$

tiene radio de convergencia 1. Sea f_k la función suma de dicha serie. Prueba que la sucesión $\{f_k\}$ converge uniformemente en $D(0,1)$ y calcula la serie de Taylor centrada en 0 de la función límite.

Solución.
Fijemos un número natural k, y llamemos

$$c_n = \frac{k}{kn(n+1)+1}.$$

Es claro que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{kn(n+1)+1}{k(n+1)(n+2)+1}$$

converge a 1. Luego, el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 0} \frac{k}{kn(n+1)+1}\, z^n$$

es 1.

Supongamos que la sucesión $\{f_k\}$ converge uniformemente en $D(0,1)$ y llamemos f a su función límite. Por el Teorema de convergencia de Weierstrass se tiene entonces que para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que

$$f^{m)}(z) = \lim_{k\to\infty} f_k^{m)}(z).$$

En particular, para $z=0$ se tendrá que

$$f^{m)}(0) = \lim_{k\to\infty} f_k^{m)}(0) = \lim_{k\to\infty} m!\, \frac{k}{km(m+1)+1} = m!\, \frac{1}{m(m+1)},$$

y por tanto

$$\frac{f^{m)}(0)}{m!} = \frac{1}{m(m+1)}.$$

Luego la serie de Taylor centrada en 0 de la función límite f es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\, z^n.$$

Ciertamente, la serie de potencias que aparece converge en $D(0,1)$ ya que

$$\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n}{n+2} \longrightarrow 1.$$

Por tanto, estamos autorizados a considerar la función f anterior.

Veamos finalmente que $\{f_k\}$ converge uniformemente a f en $D(0,1)$. Dado $z \in D(0,1)$ tenemos que

$$| f(z) - f_k(z) |=| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{kn(n+1)+1} z^n |=$$

$$| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{k}{kn(n+1)+1} \right) z^n |=$$

$$| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{kn(n+1)+1-kn(n+1)}{n(n+1)[kn(n+1)+1]} z^n |=$$

$$| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)[kn(n+1)+1]} z^n |\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)[kn(n+1)+1]} \mid z \mid^n \leq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)[kn(n+1)+1]} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)kn(n+1)} = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

De aquí se deduce que $\{f_k\}$ converge uniformemente a f en $D(0,1)$. ■

Ejercicio Propuesto 115.
Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$, y f una función continua en Ω. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

b) Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω convergente a un punto z de Ω, la sucesión $\{f_n(z_n)\}$ converge a $f(z)$.

Solución.
a) $\Rightarrow$ b). Dada una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω convergente a un punto z de Ω, es claro que el conjunto $K := \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ es un compacto de Ω, luego, por a), $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en K. Veamos que la sucesión $\{f_n(z_n)\}$ converge a $f(z)$. Fijemos $\varepsilon > 0$.

Como $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en K,

$$\exists m_1 \in \mathbb{N} \;:\; n \geq m_1 \;\text{ se verifica que }\; | f_n(w) - f(w) |< \frac{\varepsilon}{2}, \;\; \forall w \in K.$$

En particular,

$$\forall n \geq m_1 \text{ se verifica que } \mid f_n(z_n) - f(z_n) \mid < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\{z_n\}$ converge a z y f es continua, se tiene que $\{f(z_n)\}$ converge a $f(z)$, y por tanto

$$\exists m_2 \in \mathbb{N} \; : \; n \geq m_2 \text{ se verifica que } \mid f(z_n) - f(z) \mid < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Llamemos $m = \max\{m_1, m_2\}$. Para todo $n \geq m$ se verifica que

$$\mid f_n(z_n) - f(z) \mid \leq \mid f_n(z_n) - f(z_n) \mid + \mid f(z_n) - f(z) \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b) $\Rightarrow$ a). Veamos que NO a) $\Rightarrow$ NO b).

Supongamos que existe un subconjunto compacto K de Ω tal que $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en K. Entonces,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; : \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists n \geq m \text{ y } \exists w \in K \; : \; \mid f_n(w) - f(w) \mid \geq \varepsilon_0.$$

En consecuencia, existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y una sucesión $\{w_{\sigma(n)}\}$ de elementos de K tales que

$$\mid f_{\sigma(n)}(w_{\sigma(n)}) - f(w_{\sigma(n)}) \mid \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como K es compacto, existe una sucesión parcial de $\{w_{\sigma(n)}\}$ convergente a un punto $z \in K$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{w_{\sigma(n)}\}$ converge a z. Consideremos la sucesión $\{z_n\}$ de elementos de K dada por

$$z_n = \begin{cases} w_{\sigma(m)} & \text{si } \; n = \sigma(m) \text{ para algún } m \\ z & \text{si } \; n \neq \sigma(m) \text{ para todo } m. \end{cases}$$

Es claro que $\{z_n\}$ converge a z, así como que

$$\mid f_{\sigma(n)}(z_{\sigma(n)}) - f(z_{\sigma(n)}) \mid \geq \varepsilon_0.$$

Como f es continua se sigue que $\{f(z_n)\}$ converge a $f(z)$, y por tanto

$$\exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geq m \text{ se verifica que } \mid f(z_n) - f(z) \mid < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ahora bien, por otra parte, para todo $n \geq m$ se tiene que

$$\mid f_{\sigma(n)}(z_{\sigma(n)}) - f(z) \mid = \mid f_{\sigma(n)}(z_{\sigma(n)}) - f(z_{\sigma(n)}) + f(z_{\sigma(n)}) - f(z) \mid \geq$$

$$| f_{\sigma(n)}(z_{\sigma(n)}) - f(z_{\sigma(n)}) | - | f(z_{\sigma(n)}) - f(z) | \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2},$$

y por tanto $\{f_n(z_n)\}$ no converge a $f(z)$. ■

Ejercicio Propuesto 116.
Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$ que converge a una función f uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Sea g una función continua en $\mathbb{C}$. Prueba que la sucesión $\{g \circ f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a la función $g \circ f$.

Solución.
Como $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas que converge a f uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, se sigue que f es continua en Ω. Luego la función $g \circ f$ es también continua en Ω. Dada una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω convergente a $z \in \Omega$, por la implicación a) $\Rightarrow$ b) del ejercicio anterior tenemos que $\{f_n(z_n)\}$ converge a $f(z)$. Como g es una función continua, se sigue que $\{g(f_n(z_n))\}$ converge a $g(f(z))$. Finalmente, por la implicación b) $\Rightarrow$ a) del ejercicio anterior tenemos que la sucesión $\{g \circ f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a la función $g \circ f$.
■

Ejercicio Propuesto 117.
Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) *$\{f_n\}$ converge uniformemente en cada compacto de Ω.*

b) *Cada punto de Ω posee un entorno en el que $\{f_n\}$ converge uniformemente.*

Solución.

a) $\Rightarrow$ b). Como Ω es abierto, dado $a \in \Omega$, podemos tomar $R > 0$ tal que $D(a, R) \subseteq \Omega$, y por tanto $\overline{D}(a, \frac{R}{2}) \subseteq \Omega$. Como $\overline{D}(a, \frac{R}{2})$ es un compacto, por a), $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\overline{D}(a, \frac{R}{2})$.

b) $\Rightarrow$ a). Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Para cada $a \in K$, sea U_a un entorno (abierto) de a en el que $\{f_n\}$ converge uniformemente. Como quiera que

$$K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_a,$$

y K es compacto se sigue que

$$\exists a_1, ..., a_n \in K \text{ tales que } K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{a_j}.$$

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada U_{a_j} $(1 \leq j \leq n)$, se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en K. ■